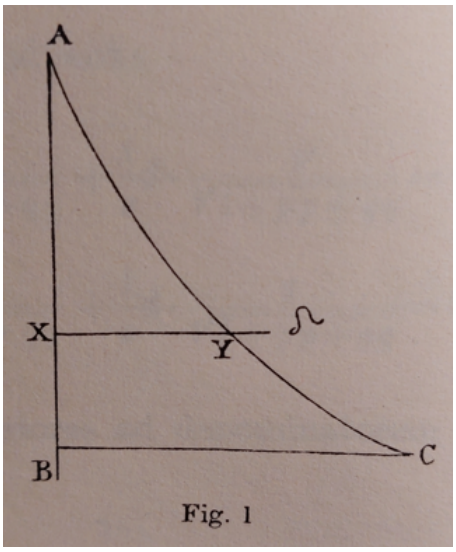
Über die Brachystochrone in einem widerstehenden Medium, während der Körper auf irgendeine Weise zu einem festen Kraftzentrum hingezogen wird*

Leonhard Euler

§1 Es sei O das Kraftzentrum, dessen Anziehung zum Abstand $= x$ hin X sei, irgendeine Funktion von x; aber dann, wenn die Geschwindigkeit des Körpers $= v$ war, sei die der Bewegung widerstehende entgegen gerichtete Kraft $= V$, irgendeine Funktion von v. Nun sei AXC die gesuchte Brachystochrone, über welcher der herabsinkende Körper in kürzester Zeit von A zu C gelange, wenn freilich das Herabsinken in Ruhe begonnen hat. Aber nichts verhindert, dass selbigem in A schon eine gewisse Geschwindigkeit zugeschrieben wird.

*Originaltitel: "De brachystochrona in medio resistente, dum corpus ad centrum virium utunque attrahitur", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 8* (1822, geschrieben 1780): pp. 41 – 45, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 338 – 342, Eneström Nummer E761, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Für den Anfang dieser Kurve A setze man den Abstand $OA = a$ und für das Ende C den Abstand $OC = c$ und den Winkel $AOC = b$. Aber für irgendeinen Punkt X von ihr setze man ihren Abstand $OX = x$ und den Winkel $AOX = y$; und es ist offensichtlich, dass durch die Relation zwischen x und y die Kurve gleichermaßen bestimmt wird wie durch eine Gleichung zwischen orthogonalen Koordinaten. Man setze aber den Bogen $AX = s$ und sein Element $Xx = ds$, und nach Zeichnen der Gerade Ox und nachdem von x aus zu OX hin das Lot xy gezeichnet worden ist, wird $Xy = -dx$ und wegen des Winkels $XOx = dy$ wird $xy = xdy$ sein, woher das Element

$$Xx = ds = \sqrt{dx^2 + xxdy^2}$$

wird; daher, wenn wir $dy = pdx$ setzen, wird $ds = -dx\sqrt{1 + ppxx}$ sein.

§2 Weil nun der Körper in X in der Richtung XO mit der Kraft $= X$ angeregt wird, wird daraus für die Bewegungsrichtung Xx die Kraft $X \cdot \frac{Xy}{Xx} = -\frac{Xdx}{ds}$ entspringen; aber die Kraft des Widerstands, nachdem die Geschwindigkeit des Körpers in $X = v$ gesetzt worden ist, ist $= V$, woher der Körper von einer Kraft $= -\frac{Xdx}{ds} - V$ beschleunigt werden wird, welche mit dem Raumelement ds multipliziert das Inkrement des Quadrats der Geschwindigkeit geben wird, woher also $vdv = -Xdx - Vds$ sein und daher wegen $ds = -dx\sqrt{1 + ppxx}$

$$vdv = dx(V\sqrt{1+ppxx} - X)$$

werden wird, welche Gleichung die Relation zwischen der Geschwindigkeit v und sich den eigens auf die Kurve beziehenden Größen ausdrückt. Weil also der unendlich kleine Zeitabschnitt durch $Xx = ds$ hindurch $\frac{ds}{v} = -\frac{dx\sqrt{1+ppxx}}{v}$ ist, wird unter allen von A bis hin zu C zu zeichnenden Kurven C die gesucht, für welche der Wert dieser Integralformel $\int \frac{dx\sqrt{1+ppxx}}{v}$ der kleinste von allen ist.

§3 Hier wird es vor allem förderlich sein bemerkt zu haben, wenn die Grenze C auf der Gerade AO angenommen wird, dass die Brachystochrone auf diese Gerade selbst fallen muss, für deren Bewegung wegen $y = 0$ und daher auch $p = 0$ diese Gleichung hervorgeht: $vdv = dx(V - X)$, weil welche im Allgemeinen keineswegs aufgelöst werden kann, wird noch viel weniger verlangt werden können, dass im Allgemeinen für die Brachystochrone AC die Bestimmung der Bewegung vollkommen ausgeführt wird, sondern wir werden anzusehen sein Besonderes geleistet zu haben, wenn wir nur eine Differentialgleichung zwischen den drei Variablen x, y, v finden konnten, nach Verbinden von welcher mit der Formel

$$vdv = dx(V\sqrt{1+ppxx} - X)$$

man natürlich einsieht, dass es an sich möglich ist, dass die Geschwindigkeit v eliminiert werden kann und daher eine Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y erhalten werden kann.

§4 Weil also unter allen Kurven AG die gesucht werden muss, für welche der Wert dieser Integralformel $\int \frac{dx\sqrt{1+ppxx}}{v}$ minimal ist, wird zum in der vorhergehenden Dissertation gelösten allgemeinen isoperimetrischen Problem zurückzukehren sein. Aber weil hier die Umstände etwas abgewandelt sind, wird es ratsam sein, die dort gefundene Lösung in der Form eines Theorems hierauf zu übertragen, welches sich wie folgt verhält:

§5 *Wenn unter allen Kurven, welche vom Punkt A zum Punkt C hin gezeichnet werden können, die gesucht wird, in welcher der Wert der Integralformel $\int Wdx$ maximal oder minimal sein soll, wo W außer den zwei Variablen x und y und deren Differentialen $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ etc., darüber hinaus die Variable v beinhaltet, sodass gilt*

$$dW = Ldv + Mdx + Ndy + Pdp + \text{etc.},$$

dann aber die Größe v so über eine Differentialgleichung gegeben ist, dass für $dv = \mathfrak{M}dx$

$$d\mathfrak{M} = \mathfrak{L}dv + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \text{etc.}$$

ist, suche man nach Festlegen all dieser Dinge $\Lambda = e^{\int \mathfrak{L}dx}$ und daher weiter die Größe $\Pi = \int L\Lambda dx$, welches Integral man so nehme, dass es für die Grenze C verschwindet, oder was dasselbe meint, man setze die Grenze C dort fest, wo $\Pi = 0$ wird, nach Finden von welchen man

$$N' = N - \frac{\Pi\mathfrak{N}}{\Lambda}, \quad P' = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}, \quad Q' = Q - \frac{\Pi\mathfrak{Q}}{\Lambda} \quad \text{etc.}$$

nehme; es wird aus diesen für die Natur der gesuchten Kurve diese Gleichung abgeleitet:

$$0 = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{etc.},$$

wo das Element dx konstant angenommen worden ist.

§6 Für unseren Fall ist also

$$W = \frac{\sqrt{1+ppxx}}{v} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{V\sqrt{1+ppxx} - X}{v},$$

welche Formel nur drei Variablen beinhaltet, nämlich v, x und p; und weil ja die Buchstaben M und $\mathfrak{M}$ nicht in die endgültige Gleichung eingehen, ist es nicht notwendig, sie zu entwickeln. Daher wird aus der ersten Formel

$$L = -\frac{\sqrt{1+ppxx}}{vv}, \quad N = 0, \quad P = \frac{pxx}{v\sqrt{1+ppxx}}$$

sein. Aus der anderen Formel wird hingegen:

$$\mathfrak{L} = -\frac{V\sqrt{1+ppxx} - X}{vv} + \frac{V'\sqrt{1+ppxx}}{v},$$

nachdem natürlich $dV = V'dv$ gesetzt worden ist; dann wird aber

$$\mathfrak{N} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P} = \frac{Vpxx}{v\sqrt{1+ppxx}}$$

sein, nach Finden von welchen die endgültige Gleichung $\frac{dP'}{dx} = 0$ und daher $P' = C$ sein wird, das heißt $C = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}$. Daher ist klar, dass die Größe Π verschwindet, wo $P = C$ wird. Daher muss die Grenze C der Brachystochrone dort festgelegt werden, wo $\frac{pxx}{v\sqrt{1+ppxx}} = C$ wird.

§7 Weil nun $\Lambda = e^{\int \mathfrak{L}dx}$ ist, wird $\frac{d\Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L}dx$ sein, also $d\Lambda = \Lambda\mathfrak{L}dx$. Daher werden wir aber weiter $\Pi = \int L\Lambda dx$ haben. Daher, weil aus der endgültigen Gleichung

$$\Pi = \frac{\Lambda P}{\mathfrak{P}} - \frac{C\Lambda}{\mathfrak{P}}, \quad \text{das heißt} \quad \Pi = \frac{\Lambda}{V} - \frac{C\Lambda v\sqrt{1+ppxx}}{Vpxx}$$

ist, wollen wir der Kürze wegen

$$\sqrt{1+ppxx} = \omega \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{1+ppxx}}{pxx} = t$$

setzen, so dass

$$t = \frac{\omega}{x\sqrt{\omega\omega - 1}}$$

ist. Wir wollen nun die gefundene Gleichung differenzieren, und weil $d\Pi = L\Lambda dx$ und $d\Lambda = \Lambda\mathfrak{L}dx$ ist, wird nach der Substitution von dieser die ganze Gleichung durch Λ geteilt werden können und daher war es nicht notwendig, ihren ihren Integralwert zu bestimmen. Nun wird man also, indem man für L und $\mathfrak{L}$ die gefundenen Werte einsetzt, zu dieser Gleichung gelangen:

$$0 = \frac{\omega dx}{vv} + \frac{\mathfrak{L}dx}{V} - \frac{dV}{VV} - \frac{C\mathfrak{L}tvdx}{V} - C \cdot \frac{(vdt + tdv)}{V} + \frac{CtvdV}{VV},$$

wo

$$\mathfrak{L} = -\frac{V\omega - X}{vv} + \frac{V'\omega}{v}$$

ist.

§8 Nun, weil $vdv = dx(V\omega - X)$ ist, wird $dx = \frac{vdv}{V\omega - X}$ sein, welchen Wert wir in unserer Gleichung anstelle von dx einsetzen wollen, natürlich wollen wir für dx überall vdv schreiben, die übrigen Terme wollen wir hingegen mit $V\omega - X$ multiplizieren und anstelle von $V'dv$ wollen wir dV schreiben, wonach die Gleichung die folgende Form annehmen wird:

$$0 = \frac{\omega dv}{v} + \frac{\omega dV}{V} - \frac{Cv\omega tdV}{V} + \frac{V\omega - X}{VV}\left(CvtdV - CVvdt - dV - \frac{Vdv}{v}\right).$$

§9 Weil diese Gleichung nicht gerade unwesentlich komplex ist, wollen wir zuerst nur ihre Terme entwickeln, in welchen die Konstante C nicht enthalten ist, und sie werden als

$$\frac{\omega dv}{v} + \frac{\omega dV}{V} - \frac{\omega dV}{V} + \frac{XdV}{VV} - \frac{\omega dv}{v} + \frac{Xdv}{Vv} \quad \text{oder} \quad \frac{X}{V}\left(\frac{dV}{V} + \frac{dv}{v}\right)$$

gefunden werden. Aber die die Konstante C enthaltenden Terme werden

$$-\frac{Cv\omega tdV}{V} - Cv\omega dt + \frac{Cv\omega tdV}{V} + \frac{CXvdt}{V} - \frac{CXtvdV}{VV}$$

sein oder nach Streichen der sich aufhebenden Terme

$$-\frac{CvtXdV}{VV} + \frac{CvXdt}{V} - Cv\omega dt,$$

weshalb sich die ganze Gleichung so verhalten wird:

$$\frac{X}{V}\left(\frac{dV}{V} + \frac{dv}{v}\right) - Cv\omega dt + \frac{CvXdt}{V} - \frac{CvtXdV}{VV} = 0.$$

§10 Wenn also diese Gleichung nun durch CvX geteilt wird, wird diese Form hervorgehen:

$$\frac{1}{CVv}d \cdot \log Vv - \frac{\omega dt}{X} + \frac{dt}{V} - \frac{tdV}{VV} = 0,$$

so der erste wie die zwei letzten Terme welcher Gleichung eine Integration zulassen. Also wird nach Nehmen des Integrals

$$-\frac{1}{CVv} + \frac{t}{V} - \int \frac{\omega dt}{X} = \Delta$$

sein, wo im Integral nur die beiden Variablen x und p enthalten sind, weil

$$\omega = \sqrt{1 + ppxx} \quad \text{und} \quad t = \frac{\sqrt{1 + ppxx}}{pxx}$$

ist, und außerdem X eine Funktion von x. Deswegen ist durch diese Gleichung die dritte Variable zusammen mit ihrer gegebenen Funktion V anzusehen bestimmt zu werden; wenn also dieser Wert in der Gleichung $vdv = dx(V\sqrt{1 + ppxx} - X)$ eingesetzt werden würde, würde eine Gleichung entspringen, welche nur die zwei Variablen x und p oder x und y beinhaltet und mit welcher die Natur der gesuchten Brachystochrone ausgedrückt wird; und mehr kann für die Lösung dieses Problems nicht verlangt werden. Aber nach Finden dieser Kurve, muss die Grenze C des Herabsinkens dort festgelegt werden, wo, wie wir schon bemerkt haben, $P = C$ wird oder wo

$$C = \frac{pxx}{v\sqrt{1 + ppxx}}$$

wird.